Universidad Autónoma "Benito Juárez" de Oaxaca

Facultad de Economía

Serie Documentos de trabajo[*]

Política fiscal y sector informal en un modelo de Ramsey

Leodegario Fabián Medinilla e Ivan Porras Chaparro

Workingpaper2021002A

Octubre de 2021

Universidad Autónoma "Benito Juárez" de Oaxaca
Facultad de Economía
Av. Universidad s/n, Ex Hacienda de Cinco Señores
Oaxaca de Juárez, Oaxaca, C.P. 68120

[*] Los documentos de trabajo de la Facultad de Economía de la UABJO son material preliminar que ha pasado por un proceso de revisión y se pone a disposición de la comunidad académica para estimular la discusión, los comentarios, la revisión y mejora del documento como tal con miras a su publicación bajo estándares rigurosos.
Los puntos de vista son propios de los autores y no representan la posición oficial de la UABJO, ni de la dirección de la Facultad de Economía ni de las autoridades de la administración central.

Política fiscal y sector informal en un modelo de Ramsey.

Leodegario Fabián Medinilla [‡] Ivan Porras Chaparro[§]

Índice

Resumen:

Se analizan los efectos de la política impositiva que grava los ingresos del sector formal, sobre la proporción de la fuerza laboral que se emplea en el sector informal mediante un modelo de crecimiento económico de dos sectores que incorpora la optimización intertemporal de un consumidor representativo y los impuestos que cobra el gobierno. Se supone una economía compuesta de un sector formal y uno informal, en la que el trabajo no se transfiere de manera instantánea entre sectores. Se asumen tecnologías productivas neoclásicas estándar y preferencias instantáneas del consumidor representativo de elasticidad de sustitución constante. La resolución de los problemas de los agentes conduce a un sistema

[‡] Maestro en Economía Matemática – Facultad de Economía UABJO - leo.fabian.m@cecad-uabjo.mx – Oaxaca de Juárez, México.
[§] Doctor en Ciencias Económicas - Facultad de Economía UABJO - iporras23@cecad-uabjo.mx - Oaxaca de Juárez, México.

de ecuaciones diferenciales que se resuelve en su versión linealizada y posteriormente se realiza un ejercicio numérico. Los hallazgos muestran que incrementos en la tasa impositiva que cobra el gobierno al sector formal estimulan la migración hacia el sector informal.

Clasificación JEL: O17, O41, H30, D90

Palabras clave: Crecimiento económico, Sector informal, Migración laboral.

Introducción

La existencia del sector informal es difícil de descartar y aunque es caracterizado por una evasión fiscal, su aporte a la actividad económica es bastante considerable. De acuerdo con el INEGI (2018), representa aproximadamente el 22.7 del ingreso nacional. Comprender la relación que guarda el tamaño de este sector con la política fiscal que implementa el gobierno es de suma relevancia para el desarrollo de la economía. Por ello, el presente trabajo tiene como objetivo explicar los efectos de la política impositiva que grava los ingresos del sector formal, dado un nivel de gasto de gobierno, sobre la proporción de la fuerza laboral que se emplea en el sector informal mediante un modelo de crecimiento económico de dos sectores que incorpora la optimización intertemporal de un consumidor representativo y los impuestos que cobra el gobierno.

El modelo planteado es una versión modificada del modelo de Ramsey (1928) de dos sectores que desarrollan Roe *et al* (2010), para admitir el mecanismo de migración propuesto por Mas-Colell y Razin (1973) y presenta características comunes a los modelos de dos sectores, como es el caso del modelo de Lewis (1957), formalizado por Ros (2000), al igual que el modelo de Mas-Colell y Razin (1973); este último es la base que inspira el modelo propuesto, diferenciando la división de los sectores para una economía clásica, es decir, el sector agrícola (tradicional) y sector industrial (moderno), donde la diferencia de estos sectores es la tecnología utilizada en la producción, otro aspecto es la forma de utilizar los factores de producción. En estos modelos se supone que, en ambos sectores, las empresas en la economía eligen sucesiones de planes de producción para obtener el mayor flujo de caja entre todos los posibles, pero el sector agrícola procura producir bienes para consumo mientras que el sector industrial produce bienes para consumo y para ahorro.

Es en sí en estos supuestos donde se argumenta la adaptación del modelo, modificando la división de los sectores; teniendo ahora el sector informal como un símil del sector tradicional y a su vez el sector formal comparable al sector moderno. Pero hablar del sector formal nos lleva indirectamente a la introducción del gobierno. Se acepta que la diferencia entre estos sectores se encuentra en la regulación por parte del gobierno, en otras palabras, en la tasa impositiva que el gobierno impone a las empresas formales por realizar operaciones productivas. La tasa impositiva es la modificación que se propone para desarrollar el modelo y así analizar el comportamiento de ambos sectores.

Se establece en primer lugar la base teórica del modelo, haciendo énfasis en la teoría del productor en vista de la naturaleza del problema a estudiar. Se ilustra la solución del modelo para el caso de la tecnología tipo Cobb-Douglas.

El entorno

Se considera una economía cerrada en la que existen dos sectores productivos: el sector formal F y el sector informal I; el tiempo transcurre de forma continua y el horizonte temporal es infinito. El sector formal produce un bien de capital, una parte del cual es consumido directamente por los hogares y el resto es reinvertido para aumentar el acervo de capital en el sector; adicionalmente, para capturar el hecho de que el gobierno ejerce una regulación sobre las actividades económicas formales, se supone que en el sector las empresas pagan una tasa impositiva τ_Y por unidad de producto vendida por unidad de tiempo. Por su parte, el sector informal produce un bien de consumo puro, es decir, no es acumulable, y a diferencia del sector formal, no paga impuestos al gobierno.

Se supone que el número de trabajadores es igual a la población y que esta crece a una tasa exógena positiva n, así, el número de trabajadores en el tiempo t es igual a $L(t) = e^{nt}L(0)$, donde $L(0)$ es el número inicial de trabajadores, el cual por simplicidad se supone igual a 1.

Cada sector requiere servicios de trabajo $L = L(t)$ y capital físico $K = K(t)$ como insumos, los cuales se pueden mover libremente entre sectores, el capital de manera instantánea y el trabajo de una forma más lenta. El flujo de servicios de esos recursos está a cargo de los hogares a cambio de salarios w_F o w_I, si el trabajo se emplea en el sector formal o en el informal respectivamente, y un precio de renta del capital $r = r(t)$. Los hogares acumulan activos a través del ahorro, de modo que su tenencia de activos en el instante t se denota por $A = A(t)$.

Ya que la economía es cerrada, todo el acervo de capital se encuentra en manos de los hogares, por ello, el nivel de activos es exactamente igual al acervo de capital, es decir $A = K$.

Los hogares

El hogar representativo maximiza el valor presente descontado de su utilidad intertemporal sujeto a una restricción presupuestaria definida sobre un horizonte infinito.

Sean $C_F = C_F(t)$ y $C_I = C_I(t)$ el consumo del bien formal y del bien informal del hogar en el tiempo t respectivamente.

El precio en el tiempo t del bien producido en el sector i se denota por $p_i = p_i(t)$, sin embargo, para facilitar el análisis, se toma el precio del bien formal como numerario, de modo que el precio del bien informal se expresa en términos del bien formal, es decir $p = \frac{p_I}{p_F}$.

El hogar ordena flujos de consumo del bien formal y del bien informal a través de

$$U = \int_0^{\infty} \frac{u\big(C_F(t), C_I(t)\big)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\gamma t} dt$$

donde se supone que la función de utilidad instantánea es del tipo CES, por lo que $u(C_F, C_I) = (C_F^{\alpha} + C_I^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$, con $0 \neq \alpha < 1$, además $\gamma > 0$ es un parámetro de preferencia temporal o de impaciencia y $\frac{1}{\theta}$ es la elasticidad de sustitución intertemporal, con $\theta > 0$.

En cada instante del tiempo, el hogar ofrece servicios de trabajo en cualquiera de los dos sectores a cambio de salarios w_i, en este sentido, el hogar debe decidir cuál es la cantidad de trabajo a emplear en el sector formal y en el informal. Por otra parte, el hogar posee activos A que puede alquilar a las empresas como capital, o prestar a otros hogares, a cambio de un interés r por unidad de activo por unidad de tiempo. El hogar asigna parte de su ingreso a la compra de C_F y C_I para su consumo y ahorra acumulando activos adicionales

$$\dot{A} = \dot{A}(t) = \frac{dA(t)}{dt}.$$

La restricción presupuestaria del hogar, tomando en cuenta que el precio del bien formal juega el papel de numerario, se escribe como

$$\dot{A} = w_F L_F + w_I L_I + rA - C_F - pC_I + T, \qquad (1)$$

donde T son las transferencias que el hogar representativo recibe por parte del gobierno. Se supone que se cumple la siguiente condición de transversalidad con el fin de evitar esquemas de Ponzi

$$\lim_{t\to\infty} A(t)e^{-\int_0^t r(s)ds} \geq 0. \qquad (2)$$

El problema intertemporal

El problema intertemporal del hogar es maximizar U sujeta a (1) y el límite de endeudamiento (2).

El hamiltoniano asociado es

$$H(t) = \frac{(C_F^\alpha + C_I^\alpha)^{\frac{1-\theta}{\alpha}} - 1}{1-\theta} e^{-\gamma t} + \lambda(t)(w_F L_F + w_I L_I + rA - C_F - pC_I + T)$$

donde $\lambda = \lambda(t)$ es una variable de coestado. Descartando soluciones de esquina, las condiciones suficientes para la maximización de U son

$$(C_F^\alpha + C_I^\alpha)^{\frac{1-\theta}{\alpha}-1} C_F^{\alpha-1} e^{-\gamma t} = \lambda \qquad (3)$$

$$(C_F^\alpha + C_I^\alpha)^{\frac{1-\theta}{\alpha}-1} C_I^{\alpha-1} e^{-\gamma t} = p\lambda \qquad (4)$$

$$\dot{\lambda} = -\lambda r \qquad (5)$$

donde $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}$. La condición de transversalidad, considerando la solución de (4), debe cumplirse con igualdad:

$$\lim_{t\to\infty} A(t)\lambda(t) = 0.$$

Con esto se asegura que, en el límite, el valor de los activos en manos del hogar es cero o bien que no termina con activos en las manos.

Despejando λ de (3), haciendo uso de (4) y tomando logaritmos se tiene que

$$\ln \lambda = \left(\frac{1-\theta}{\alpha} - 1\right)\left[\alpha \ln C_F + \ln\left(1 + p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)\right] + (\alpha - 1)\ln C_F - \gamma t$$

Luego, derivando con respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \left(\frac{1-\theta-\alpha}{\alpha-1}\right)\left(\frac{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{1+p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right)\frac{\dot{p}}{p} \ -\theta\frac{\dot{C}_F}{C_F} - \gamma$$

Sustituyendo (5) en esta ecuación y rearreglando se obtiene la condición de Euler

$$\frac{\dot{C}_F}{C_F} = \frac{1}{\theta}\left[r - \gamma - \left(\frac{1-\alpha-\theta}{1-\alpha}\right)\left(\frac{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{1+p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right)\frac{\dot{p}}{p}\right] \tag{6}$$

Si $\theta = 1 - \alpha$ entonces esta condición se convierte en

$$\frac{\dot{C}_F}{C_F} = \frac{r-\gamma}{1-\alpha}$$

Así, el hogar elige un patrón de gasto tal que la tasa de crecimiento del gasto de consumo del bien formal es igual a la tasa de retorno del ahorro neta de la tasa de preferencia por el tiempo, ponderada por la elasticidad de sustitución entre bienes. Si la brecha es amplia entonces los hogares tienen incentivos para posponer una fracción de consumo presente y ahorrar. Por otra parte, si $\theta > 1 - \alpha$ entonces los incentivos al ahorro se ven amortiguados en la medida en que la elasticidad de sustitución intertemporal sea menor que la tasa de retorno, dados los cambios en la tasa de crecimiento del precio del bien informal en términos del bien formal.

El gobierno

El gobierno cobra un impuesto a las empresas en el sector formal por los ingresos por la venta de producto $0 < \tau_Y < 1$. Es decir, el gobierno grava los ingresos que obtienen las empresas formales. A las empresas del sector informal el gobierno no les cobra impuestos.

El ingreso que el gobierno obtiene lo transfiere directamente a los hogares, de modo que su restricción presupuestaria está dada por

$$T(t) = \tau_Y(t)Y_F(t) \tag{7}$$

donde $Y_F = Y_F(t)$ es el volumen de producción del sector formal.

El sector formal

Se supone que el sector formal, F, cuenta tecnología agregada tipo Cobb-Douglas dada por la función de producción:

$$Y_F = K_F^{\beta} L_F^{1-\beta} \tag{8}$$

donde Y_F es la cantidad producida, L_F es la cantidad de trabajo empleado en el sector, K_F es el stock de capital físico utilizado y $0 < \beta < 1$ garantiza retornos constantes a escala.

Dados los impuestos que paga la empresa al gobierno y los precios de los factores que se utilizan en el sector, la empresa representativa del sector formal busca maximizar sus beneficios netos de impuestos dados por

$$\Pi_F = Y_F - w_F L_F - rK_F - \tau_Y Y_F.$$

Las condiciones de primer orden para la resolución del problema de la empresa representativa del sector formal son las siguientes:

$$(1 - \tau_Y)\beta K_F^{\beta-1} L_F^{1-\beta} = r \tag{9}$$

$$(1 - \tau_Y)(1 - \beta)K_F^{\beta} L_F^{-\beta} = w_F \tag{10}$$

Cabe destacar que estas condiciones involucran la tasa impositiva que pagan las empresas formales al gobierno.

El sector informal

Por su parte, la producción en el sector informal se lleva a cabo mediante una función de producción del tipo Cobb-Douglas empleando trabajo y capital:

$$Y_I = K_I^{\phi} L_I^{1-\phi} \tag{11}$$

Se supone que $0 < \phi < 1$, de modo que la tecnología en este sector exhibe rendimientos constantes de escala. En este caso el trabajo es remunerado al salario w_I y el capital a la tasa de arriendo r vigente en el mercado de capital. Dado el precio relativo p y los precios de los factores, los beneficios que busca maximizar la empresa representativa del sector informal están dados por

$$\Pi_I = pK_I^{\phi} L_I^{1-\phi} - w_I L_I - rK_I$$

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$p\phi K_I^{\phi-1} L_I^{1-\phi} = r \qquad (12)$$

$$p(1-\phi) K_I^{\phi} L_I^{-\phi} = w_I \qquad (13)$$

Estas condiciones son las usuales y establecen que la remuneración de las productividades marginales de los factores deben ser sus precios reales.

Por otra parte, desde la perspectiva de la contabilidad nacional, el valor del gasto del gobierno se puede ver como una fracción g del ingreso total de la economía $Y_F + pY_I$, y a su vez, este gasto debe ser exactamente igual a su recaudación, es decir

$$g(Y_F + pY_I) = \tau_Y Y_F, \qquad (14)$$

donde $0 < g < 1$.

Caracterización del equilibrio

En el entorno de este modelo, los hogares y las empresas en los sectores toman los precios como dados. En este sentido, su comportamiento en los mercados de factores y producto es competitivo. Se consideran las siguientes definiciones.

Una asignación factible es una especificación de trayectorias de niveles de stock de capital y servicios de trabajo en cada sector, niveles de consumo del bien formal y del bien informal por parte de los hogares y transferencias del gobierno $\{K_F(t), K_I(t), L_F(t), L_I(t), T(t)\}_{t\geq 0}$ tales que $C_F(t) \geq 0$, $C_I(t) \geq 0$ y que satisface la ecuación (7) en cada instante t.

Un sistema de precios es una especificación de trayectorias de precios de los factores y precios del bien formal en términos del bien informal $\{w_F(t), w_I(t), r(t), p(t)\}_{t\geq 0}$.

Una política gubernamental es una especificación de trayectorias de transferencias del gobierno a los hogares $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e impuestos que cobra a las empresas en el sector formal sobre la producción de bienes formales $\{\tau_Y(t)\}_{t\geq 0}$.

Así, dado un nivel inicial del precio del bien informal en términos del bien formal $p(0)$ y unas dotaciones iniciales de trabajo y capital de la economía, esto es $K(0)$ y $L(0)$, el equilibrio se define de la siguiente manera.

Un equilibrio competitivo es una asignación factible, un sistema de precios y una política gubernamental tales que

a) dado el sistema de precios y la política gubernamental, la asignación maximiza el valor presente de la utilidad descontada de los hogares, maximiza los beneficios de las empresas en los sectores dadas sus tecnologías, produciendo beneficios cero y todos los mercados se vacían;
b) dada la asignación y el sistema de precios, la política gubernamental satisface la restricción presupuestaria (7).

Las condiciones para la solución del problema de maximización de beneficios de las empresas en los sectores están dadas por las condiciones de primer orden (9), (10), (12) y (13) o bien por la igualdad entre el precio y el costo marginal en cada sector.

La condición de vaciado del mercado de trabajo es

$$L_F + L_I = L.$$

donde L_F y L_I son las demandas de trabajo del sector formal y del sector informal respectivamente y L el trabajo total de toda la economía.

La condición de vaciado del mercado de capital es

$$K_F + K_I = K$$

donde, de manera similar al mercado de trabajo, K_F y K_I representan las demandas de capital de los sectores formal e informal respectivamente y K es el capital total de toda la economía.

Ya que el bien producido en el sector informal se considera de consumo puro, la condición de vaciado en el mercado de bienes informales es

$$C_I = Y_I. \qquad (15)$$

Todas estas condiciones, de beneficios, trabajo y capital en los sectores junto con la del mercado de bienes informales constituyen, siguiendo a Roe *et al* (2010), las condiciones de equilibrio intratemporal ya que no involucran ecuaciones de movimiento.

De las condiciones (3) y (4) para resolver el problema de los hogares, se obtiene

$$C_F = C_I p^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (16)$$

Las soluciones de (8), (9), (11), (12) y (14) para los niveles de capital están dadas por

$$K_F = \eta K, \qquad K_I = (1-\eta)K,$$

donde

$$\eta = \frac{g(1-\tau_Y)\beta}{g(1-\tau_Y)\beta + (\tau_Y - g)\phi}.$$

A diferencia de Mas-Collel y Razin (1973), los coeficientes de las asignaciones de capital en los sectores no dependen de los parámetros asociados al lado de la demanda sino de la tasa impositiva elegida por el gobierno, la proporción que representa el gasto público en el ingreso total de la economía y los parámetros asociados a la tecnología productiva en los sectores. Estas asignaciones pueden ser expresadas en términos por trabajador del sector respectivo, de la siguiente manera

$$k_F = \frac{\eta k}{\rho}, \qquad k_I = \frac{(1-\eta)k}{1-\rho}, \qquad (17)$$

Donde $k_i = \frac{K_i}{L_i}$ para $i = F, I$, $k = K/L$ y $\rho = L_F/L$ es la fracción del trabajo empleada en el sector formal.

De lo anterior, los precios de los factores que vacían los mercados, los niveles de producción y los de consumo en cada instante del tiempo quedan todos en función del nivel de capital per cápita k, la fracción de trabajo empleada en sector formal ρ y el precio p.

Equilibrio intertemporal

El equilibrio intertemporal está dado por las trayectorias del capital per cápita y los precios relativos, los cuales a su vez involucran el comportamiento de la tasa migratoria del factor trabajo entre sectores. Esto es, el estado de la economía se determina por medio de tres ecuaciones de movimiento, una para la migración, una para el nivel de capital per cápita y una para los precios. Una vez solucionado el sistema y halladas sus trayectorias temporales es posible determinar las trayectorias temporales de las variables del modelo restantes. En otras palabras, una vez encontradas $\{p(t), k(t), \rho(t)\}_{t\geq 0}$, se soluciona todo el modelo.

Siguiendo a Mas-Colell y Razin (1973), se supone que la migración del trabajo está relacionada positivamente con el diferencial salarial entre sectores. Específicamente, la evolución en el tiempo del volumen de trabajo empleado en el sector formal está dada por

$$\dot{L_F} = \left[\varphi\left(\frac{w_F - w_I}{w_I}\right) + n\right] L_F$$

En términos per cápita, la ecuación de migración es

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \varphi\left(\frac{w_F - w_I}{w_I}\right). \qquad (18)$$

Para encontrar la ecuación diferencial para el nivel de capital per cápita se considera nuevamente la restricción presupuestaria de los hogares (1), la condición de vaciado de mercado del sector informal (15), las condiciones para el problema de los hogares (3), (4), (16) y el hecho de que

$$\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{dt} = \dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk.$$

Por tanto, la ecuación de movimiento del capital per cápita es

$$\dot{k} = \eta^{\beta} k^{\beta} \rho^{1-\beta}\left[1 + \tau_Y - \frac{\beta(1-\tau_Y)}{\phi}\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right) p^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right] - nk. \qquad (19)$$

Con el objetivo de encontrar la ecuación diferencial para p, volvemos a la condición de Euler (6). Se procede de la siguiente manera. Primero el lado izquierdo se escribe en términos per cápita teniendo en mente que

$$\dot{c_F} = \frac{d\left(\frac{C_F}{L}\right)}{dt} = \frac{\dot{C_F}}{L} - nc_F,$$

donde $c_F = C_F/L$. Luego se utiliza la condición de vaciado de mercado del sector informal y las ecuaciones (16) y (17) para expresar C_F en términos de k, ρ y η. Con ello es posible tomar la derivada con respecto al tiempo y sustituir en el lado izquierdo de la condición de Euler tanto c_F como $\dot{c_F}$ para finalmente resolver para $p^{\cdot}$. La ecuación diferencial resultante es

$$\dot{p} = \left\{\frac{\phi\frac{\dot{k}}{k} - \left(\frac{1-\phi}{1-\rho}\right)\dot{\rho} + n - \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau_Y)\beta\left(\frac{\eta}{\rho}k\right)^{\beta-1} - \gamma\right]}{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(1-\alpha)+\theta}\right\}\left[\theta(\alpha-1)\left(1 + p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)\right]p \qquad (20)$$

Esta ecuación junto con (18) y (19) determinan el estado de la economía.

Equilibrio de estado estacionario

Al resolver para el estado estacionario de la ecuación de migración, haciendo el lado izquierdo de (18) igual a cero y utilizando los resultados encontrados en (17), se concluye que la migración no ocurre si

$$\rho_{ss} = \frac{\frac{\eta}{1-\eta}}{\left[\left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right) + \frac{\eta}{1-\eta}\right]}. \qquad (21)$$

Esto implica que $\dot{\rho} > 0$ si $\rho < \rho_{ss}$ y $\dot{\rho} < 0$ si $\rho > \rho_{ss}$.

Por otra parte, para encontrar los niveles de estado estacionario del capital per cápita y los precios, basta hacer igual a cero el lado izquierdo de las ecuaciones (19) y (20) y resolver para las variables de interés. Estos niveles, denotados con subíndice ss están dados por las ecuaciones

$$k_{ss} = \left[\frac{\gamma + n\theta}{(1-\tau_Y)\beta\left(\frac{\eta}{\rho_{ss}}\right)^{\beta-1}}\right]^{\frac{1}{\beta-1}} \qquad (22)$$

$$p_{ss} = \left[\frac{(1+\tau_Y)\eta^{\beta}\rho_{ss}^{1-\beta} - nk_{ss}^{1-\beta}}{\frac{\beta(1-\tau_Y)(1-\eta)}{\phi}\left(\frac{\rho_{ss}}{\eta}\right)^{1-\beta}} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \tag{23}$$

Con estos valores se pueden determinar los valores de estacionario de las demás variables del modelo.

Solución del sistema dinámico

En la ecuación de movimiento (18) se sustituyen las expresiones de los salarios utilizando las condiciones de equilibrio intratemporales para obtener

$$\dot{\rho} = \varphi \left[\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)\left(\frac{\eta}{1-\eta}\right)\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right) - 1 \right] \rho \tag{24}$$

Para hallar un equilibrio distinto al de estado estacionario, es necesario solucionar el sistema dinámico dado por las ecuaciones (19), (20) y (24).

Sin embargo, se trata de un sistema no lineal. Por ello, se linealiza alrededor del estado estacionario, haciendo $f(k,\rho,p) = \rho^{\cdot}$, $g(k,\rho,p) = k^{\cdot}$ y $h(k,\rho,p) = p^{\cdot}$, de modo que, la versión linealizada del sistema dinámico es

$$\dot{\rho} = f_{\rho}(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss})(\rho - \rho_{ss})$$
$$k^{\cdot} = g_{\rho}(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss})(\rho - \rho_{ss}) + g_k(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss})(k - k_{ss}) + g_p(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss})(p - p_{ss})$$
$$p^{\cdot} = h_{\rho}(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss})(\rho - \rho_{ss}) + h_k(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss})(k - \rho_{ss}) + h_p(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss})(p - p_{ss})$$

donde $f_{\rho} = \partial f/\partial \rho$, $g_k = \partial g/\partial k$, $g_{\rho} = \partial g/\partial \rho$, $g_p = \partial g/\partial p$, $h_k = \partial h/\partial k$, $h_{\rho} = \partial h/\partial \rho$ y $h_p = \partial h/\partial p$. Estas expresiones en el sistema linealizado son

$$f_{\rho}(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss}) = -\varphi \left[1 + \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)\left(\frac{\eta}{1-\eta}\right) \right]$$

$$g_k(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss}) = \beta\eta^{\beta}k_{ss}^{\beta-1}\rho_{ss}^{1-\beta}\left[1 + \tau_Y - \frac{\beta(1-\tau_Y)}{\phi}\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)p_{ss}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right] - n$$

$$g_{\rho}(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss}) = (1-\beta)\eta^{\beta}k_{ss}^{\beta}\rho_{ss}^{-\beta}\left[1 + \tau_Y - \frac{\beta(1-\tau_Y)}{\phi}\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)p_{ss}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right]$$

$$g_p(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss}) = -\eta^{\beta} k_{ss}^{\beta}\rho_{ss}^{1-\beta}\,\frac{\beta(1-\tau_Y)}{\phi}\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)p_{ss}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}$$

$$h_k(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss}) = \left[\frac{\theta(\alpha-1)\left(1+p_{ss}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)p_{ss}}{p_{ss}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(1-\alpha)+\theta}\right]\left[\theta g_k(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss}) - \frac{1}{\theta}(1-\tau_Y)\beta\left(\frac{\eta}{\rho_{ss}}\right)^{\beta-1}(\beta-1)k_{ss}^{\beta-2}\right]$$

$$h_\rho(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss}) = \left[\frac{\theta(\alpha-1)\left(1+p_{ss}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)p_{ss}}{p_{ss}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(1-\alpha)+\theta}\right]\left[\left(\frac{\phi-1}{1-\rho_{ss}}\right)f_\rho(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss}) - \frac{1}{\theta}(1-\tau_Y)\beta(\eta k_{ss})^{\beta-1}(1-\beta)\rho_{ss}^{-\beta}\right]$$

$$h_p(k_{ss},\rho_{ss},p_{ss}) = \left\{n-\frac{1}{\theta}\left[(1-\tau_Y)\beta\left(\frac{\eta}{\rho_{ss}}k_{ss}\right)^{\beta-1}-\gamma\right]\right\}\left\{\frac{\theta\left(\alpha-1+p_{ss}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)}{p_{ss}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(1-\alpha)+\theta} - \frac{\alpha(\alpha-1)\theta p_{ss}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(1+p_{ss}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)}{\left[p_{ss}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(1-\alpha)+\theta\right]^2}\right\}$$

Las soluciones del sistema linealizado y las propiedades del sistema no lineal dependen de los valores de los parámetros. En concreto, los valores propios de la matriz Jacobiana vienen determinados por los parámetros que se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 1 Valores de los parámetros para la calibración

Parámetro	α	β	γ	φ	ϕ	$1/\theta$	g	τ_Y	n
Valor	0.95	0.4	0.04	1	0.4	0.158	0.2567	0.391	0.013

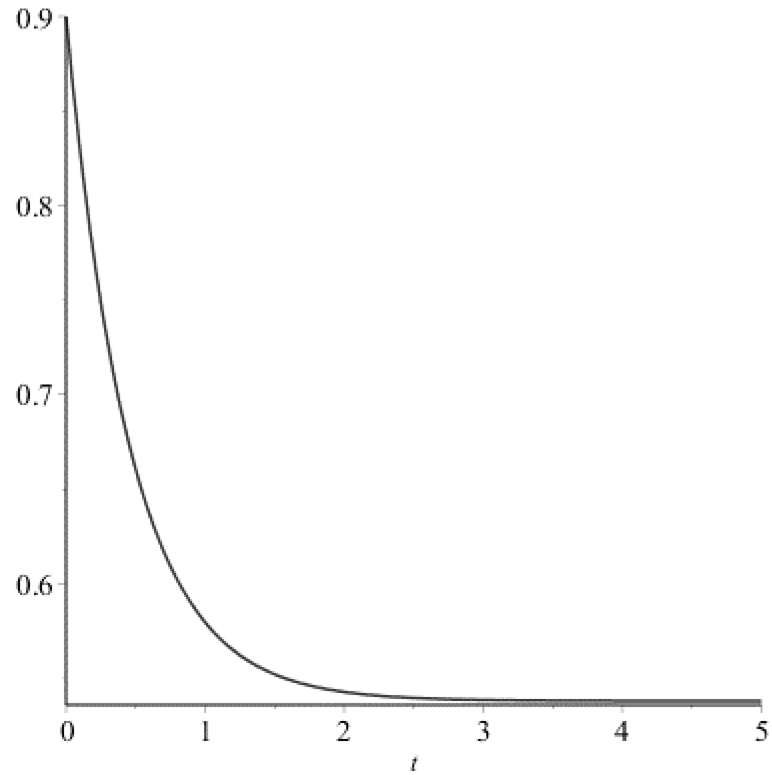
El valor del parámetro α se eligió cercano a la unidad con el fin de evaluar la situación en la que los dos bienes tienden a ser sustitutos. Los parámetros correspondientes a las funciones de producción se consideraron iguales para tomar en cuenta la similitud entre los sectores, los valores específicos son los de Casares (2007). El parámetro γ se basa en Roe, Smith y Saracoglu (2010). El parámetro φ se fijó en la unidad para ilustrar el impacto directo del diferencial salarial. El valor de la tasa de crecimiento poblacional corresponde al publicado por la División de Población de la Organización de las Naciones Unidas (ONU) (2019) para México. El valor del parámetro g corresponde al porcentaje del Producto Interno Bruto que representó el gasto público para México en 2018 que reporta el Fondo Monetario Internacional en su Anuario de Estadísticas de las Finanzas Públicas y archivos de datos, y estimaciones del PIB del Banco Mundial y la OCDE. El parámetro τ_Y corresponde al reportado para América del norte por PwC y el Banco Mundial (2018). Los valores de las variables en estado estacionario son $\rho^* = 0.5379009002$, $k^* = 3.154123892$ y $p^* = 1.050863311$.

Para la calibración del modelo, se utilizan también las condiciones iniciales $K(0) = 1$, $\rho(0) = 0.9$ y $p(0) = 1$. En este sentido, la matriz Jacobiana está dada por

$$J = \begin{bmatrix} -2.164037975 & 0 & 0 \\ 0.04573735187 & -0.007800000759 & -20.67710103 \\ -0.2033817283 & 0.0008717640339 & 0.1908723594 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de correspondientes al sistema linealizado son -2.164037975, $0.0915361793205021 + 0.0903209628518015\mathrm{i}$ y $0.0915361793205021 - 0.0903209628518015\mathrm{i}$. Esto implica que el sistema dinámico, alrededor del estado estacionario es inestable. La Gráfica 1 muestra la trayectoria de la tasa migratoria en este escenario.

Gráfica 1 Trayectoria de la proporción del trabajo empleado en el sector formal

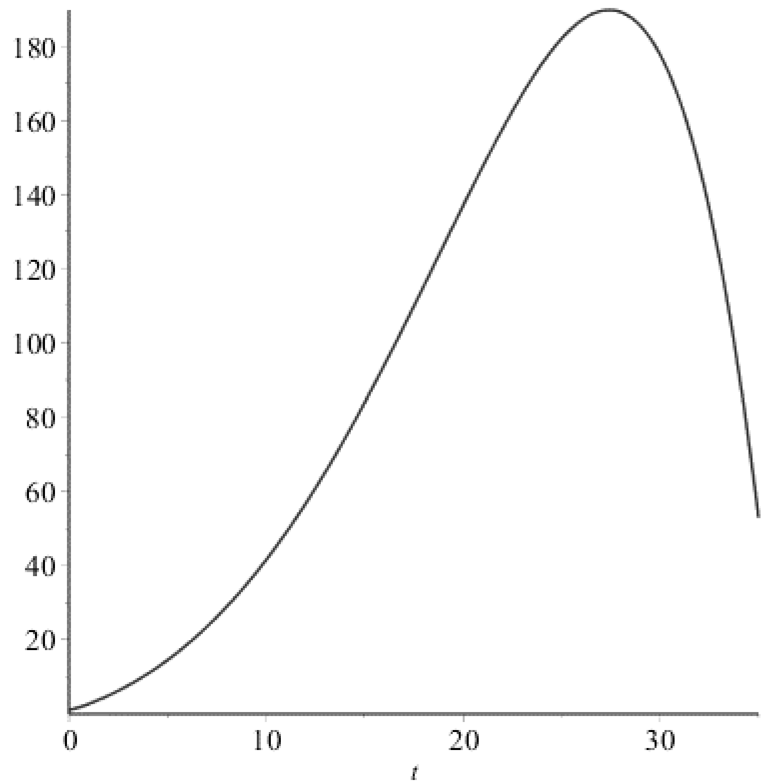


Fuente: elaboración propia en Maple.

Puede notarse que la trayectoria de la tasa migratoria converge al valor estacionario de la fracción de trabajo que se emplea en el sector formal. En este caso, inicialmente el 90% de la fuerza laboral se emplea en el sector formal, pero a medida que pasa el tiempo el sector informal crece y gana más fuerza laboral hasta acumular aproximadamente el 46%.

La trayectoria del capital se muestra en la Gráfica 2 y da cuenta del comportamiento oscilatorio que inicia con un incremento a lo largo del tiempo y que conduce a una caída para volver a crecer, lo cual caracteriza a esta variable.

Gráfica 2 Trayectoria del capital

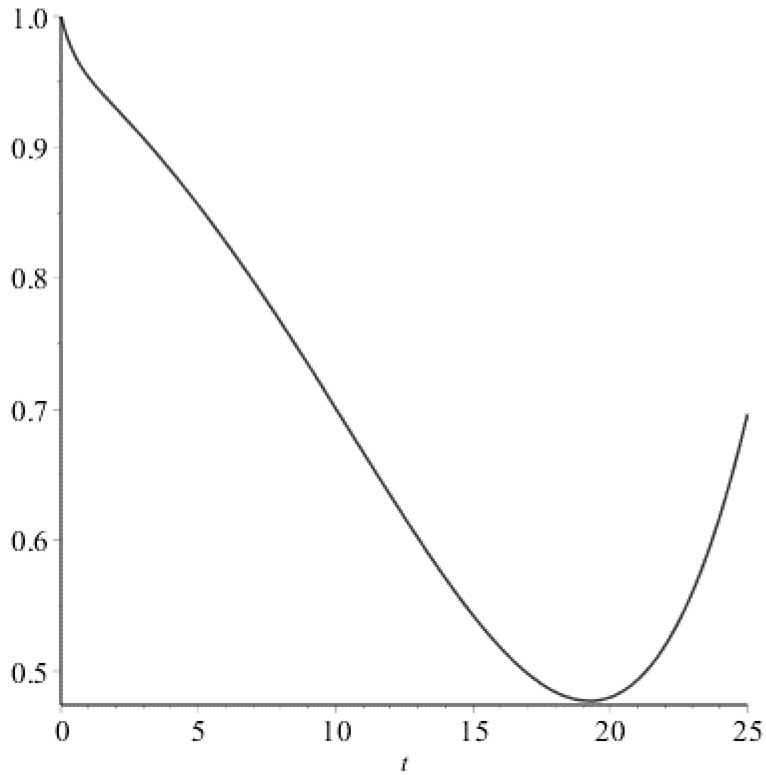


Fuente: elaboración propia en Maple

La trayectoria de los precios sin embargo muestra un comportamiento un tanto distinto que sugiere un comportamiento contrario en los períodos en los que el capital crece. Esto se muestra en la Gráfica 3.

Un incremento en la tasa impositiva para pasar de 0.391 a 0.41 por ejemplo produce un cambio en los valores estacionarios y en la configuración de valores de la matriz Jacobiana correspondiente. Las trayectorias de las variables se ven afectadas de igual forma. En específico, los valores de las variables en estado estacionario ahora son $\rho^* = 0.496969677$, $k^* = 2.991827937$ y $p^* = 1.044247727$. Esto significa que un incremento en la tasa impositiva que el gobierno cobra al sector formal por la venta de producto disminuye el nivel estacionario de la fracción de trabajo que se emplea en ese sector, así como el del capital y el precio relativo del bien informal.

Gráfica 3 Trayectoria de los precios



Fuente: elaboración propia en Maple

Esto sugiere que una política encaminada a disminuir el tamaño del sector informal y que puede revertir la migración hacia ese sector consiste en bajar la tasa impositiva τ_Y. Así, si la tasa impositiva pasa de 0.391 a por ejemplo 0.35. En este escenario, los valores de las variables en estado estacionario son $\rho^* = 0.6413676462$, $k^* = 3.515918949$ y $p^* = 1.069675272$. Esto implica que una disminución en la tasa impositiva que el gobierno cobra al sector formal tiene como consecuencia, en el estado estacionario, una disminución en el tamaño del sector informal, un mayor nivel de capital y un precio relativo ligeramente más alto.

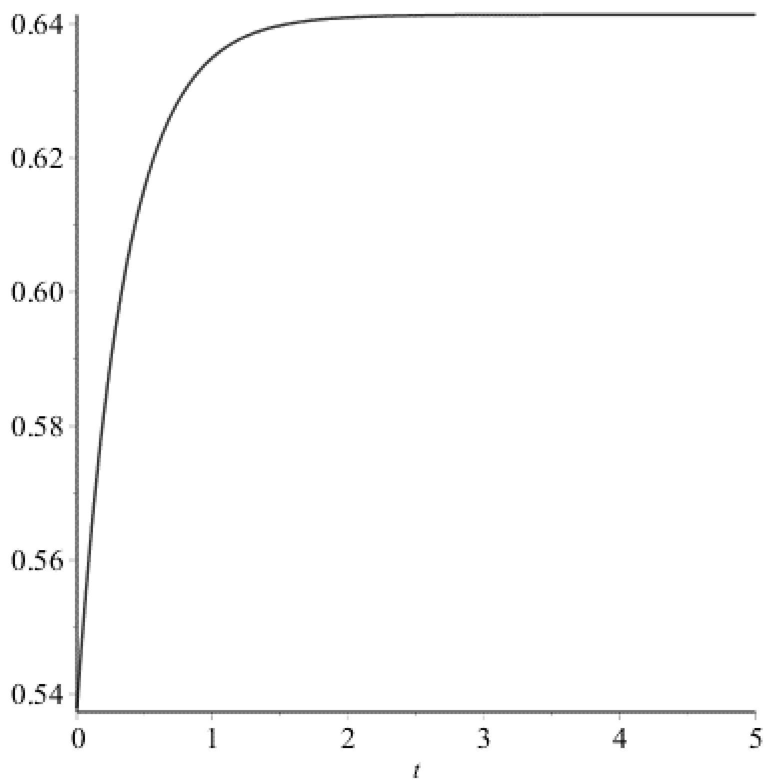
La matriz Jacobiana en este nuevo escenario está dada por:

$$J = \begin{bmatrix} -2.788370847 & 0 & 0 \\ 0.04275887964 & -0.0078000011 & -24.61881688 \\ -0.3172905167 & 0.0007328295431 & 0.1910401133 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de la matriz son -2.788370847, $0.0916200561000059 + 0.0903163803093412i$ y $0.0916200561000059 - 0.0903163803093412i$. Así, las propiedades del sistema alrededor del estado estacionario son las mismas, es decir el estado estacionario es inestable.

En la Gráfica 4 se muestra la transición de la fracción del trabajo empleado en el sector formal hacia su nuevo valor de estado estacionario. Como se aprecia, la economía se dirige hacia un nuevo escenario y la migración hacia el sector informal se revierte un poco.

Gráfica 4 Trayectoria de la fracción del trabajo empleado en el sector formal



Fuente: elaboración propia en Maple

La trayectoria del capital y el precio relativo son oscilantes y no convergen a sus nuevos valores estacionarios. Esto implica que la disminución porcentual en la tasa impositiva tiene una respuesta bastante considerable sobre el tamaño del sector informal.

Conclusiones.

Del ejercicio de calibración se pudo observar que un incremento en la tasa impositiva que cobra el gobierno a las empresas en el sector formal tiene efectos sobre las variables fundamentales del modelo. El capital se ve afectado negativamente, esto ocurre en términos generales, de modo que la descapitalización ocurre en toda la economía. La proporción de la población empleada en el sector formal disminuye. Ya que el ejercicio supone que la economía inicia con el 90% de la población empleada en el sector formal, pasar a un esquema impositivo mucho más exigente conduce a una reducción en esta fracción. Del ejercicio se puede inferir que los incrementos en las tasas impositivas implican disminuciones en magnitudes similares en la proporción de la población empleada en el sector formal. Otra de las conclusiones es sobre el efecto que tiene la modificación de la tasa impositiva sobre los precios, ocurre que los precios se ven empujados hacia abajo. Sin embargo, una disminución en la tasa impositiva tiene el efecto de reducir la fracción de la población total empleada en el sector informal. Es posible que la política fiscal en ese sentido contribuya a controlar el tamaño del sector informal.

Bibliografía

Casares, E. R. (2007). Comercio, tipo de cambio real y crecimiento. *Estudios de Economía, 34*(1), 21-35.

INEGI. (2018). *Sistema de Cuentas Nacionales de México.* México: Instituto Nacional de Estadística y Geografía.

Lewis, A. W. (1957). Desarrollo económico con oferta ilimitada de mano de obra. *El Trimestre Económico, 27*, 629-675.

Mas-Colell, A., & Razin, A. (Marzo de 1973). A Model of Intersectorial Migration and Growth. *Oxford Economic Papers, New Series, 25*(1), 72-79. Obtenido de http://www.jstor.org/stable/2662513

ONU. (2019). *World Population Prospects 2019: Data Booklet.* Organización de las Naciones Unidas.

PwC, & BM. (2018). *Paying taxes 2019.* Pwc - World Bank Group.

Ramsey, F. P. (Diciembre de 1928). A Mathematical Theory of Saving. *The Economic Journal, 38*(152), 543-559. doi:10.2307/2224098

Roe, T. L., Smith, R. B., & Saracoglu, D. S. (2010). *Multisector growth models.* London: Springer.

Ros, J. (2000). *La Teoría del Desarrollo y la Economía del Crecimiento.* México: Fondo de Cultura Económica.